ANÀLISI COMBINATÒRIA

Josep Pla i Carrera

Dos principis bàsics de càlcul d'elements de conjunts

El principi additiu [PA]

Suposem que dues experiències excloents E_1 i E_2 tenen respectivament n_1 i n_2 resultats possibles. L'experiència $E_1 \oplus E_2$ que consisteix en el fet que que s'hagi produït una d'ambdues experiències té $n_1 + n_2$ resultats possibles.
En termes conjuntistes diríem: tenim dos conjunts disjunts finits A_1, A_2, on $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Es tracta de calcular la quantitat d'elements —el *cardinal*— del conjunt $A_1 \cup A_2$, en el supòsit que coneixem els cardinals dels conjunts A_1 i A_2. El PA estableix que

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|, \text{ sempre que } A_1 \cap A_2 = \emptyset.$$

El principi multiplicatiu [PM]

Suposem que dues experiències E_1 i E_2 tenen, respectivament, n_1 i n_2 resultats possibles. Considerem l'experiència E formada per *totes* les *parelles ordenades* de resultats de les experiències E_1, E_2. L'experiència E consta de $n_1 \times n_2$ resultats possibles.
En termes conjuntistes diríem: tenim dos conjunts finits A_1 i A_2 tals que $|A_1| = n_1$, $|A_2| = n_2$. Considerem el *producte cartesià*

$$A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$$

dels conjunts A_1 i A_2. El PM estableix que $|A_1 \times A_2| = n_1 \times n_2$.

Un principi bàsic del conjunt $\mathbb{N}$ dels nombres naturals [PI]

Els nombres naturals es caracteritzen per dos fets notables:

- Tenen un primer element 1.
- Cada element $n \in \mathbb{N}$ té un únic següent $n + 1$.

Però, a més, el conjunt $\mathbb{N}$ compleix el *principi d'inducció* [PI], que estableix el següent:

Sigui $A \subseteq \mathbb{N}$, no buit, tal que

(1) $1 \in A$, i

(2) per a cada $n \in A$, **podem provar** que $n + 1 \in A$.

Aleshores $A = \mathbb{N}$.

Aquest principi el podem reescriure en els termes següents:

Sigui $P(n)$ una propietat relativa als nombres naturals tal que

(1) $P(1)$ és certa, i

(2) quan $P(n)$ és certa, **podem provar** que $P(n+1)$ també ho és.

Aleshores $P(n)$ és certa per a tot $n \in \mathbb{N}$.

La hipòtesi que fem quan suposem que la propietat P és certa per a un valor n és la *hipòtesi d'inducció.*

Nota. A vegades el primer element de la inducció és zero. Aleshores cal suposar que $\mathbb{N}$ conté el zero. De vegades, la propietat $P(n)$ és certa a partir d'un cert valor n_0. En aquests casos, hem de provar que

(1) $P(n_0)$ és certa,

(2) per a cada $n > n_0$, si $P(n)$ és certa, aleshores $P(n+1)$ també.

Aquesta mena de principis permeten establir molts i molts resultats importants, i són unes eines indispensables en l'*anàlisi combinatòria.* Abans, però de ficar-nos de ple en aquesta mena de qüestions, donarem sis exemples il·lustratius.

Exemples

1. Per anar de Barcelona a Hostalric podem fer-ho amb tren o bé amb autobús. Suposem que solament hi ha tres maneres d'anar-hi amb tren i dues amb autobús. De quantes maneres diferents és possible anar de Barcelona a Hostalric?

D'acord amb el PA, tenim que

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| = n_1 + n_2 = 3 + 2 = 5,$$

on A_1 és el conjunt d'itineraris de tren i A_2 és el conjunt d'itineraris d'autobús.

2. Hem d'anar d'Hostalric a Barcelona i, per obres, és necessari fer un tros amb tren i un tros amb autobús. Hi ha tres itineraris possibles de tren i dos d'autobús. Quantes maneres diferents tenim per arribar a Barcelona?

D'acord amb el PM: $|A_1 \times A_2| = 3 \cdot 2 = 6$.

3. Si $A_1, A_2, \ldots, A_k$ són k conjunts disjunts dos a dos i $|A_i| = n_i, i = 1, \ldots, k$, aleshores

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{k-1} \cup A_k| = n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-1} + n_k.$$

D'acord amb el PI hem d'establir:

(1) La fórmula és vertadera per a $k = 2$, que és el PA.

(2) Suposem que, si $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}, A_k$ són k conjunts disjunts dos a dos i $|A_i| = n_i, i = 1, \ldots, k$, aleshores

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{k-1} \cup A_k| = n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-1} + n_k.$$

És a dir, suposem que la propietat $P(n)$ és certa per a $n = k$. Ara hem de demostrar que, si $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}$ són $k+1$ conjunts disjunts dos a dos i $|A_i| = n_i, i = 1, \ldots, k+1$, aleshores

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup A_{k+1}| = n_1 + n_2 + \cdots + n_k + n_{k+1}.$$

Per provar-ho, fem $B_1 = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ i $B_2 = A_{k+1}$. Els conjunts B_1, B_2 són disjunts:

$$B_1 \cap B_2 = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) \cap A_{k+1} =$$

$$= (A_1 \cap A_{k+1}) \cup \cdots \cup (A_k \cap A_{k+1}) = \emptyset,$$

atès que els conjunts $A_i, i = 1, \ldots, k, k+1$, són disjunts dos a dos.

Ara podem aplicar el PA als conjunts B_1 i B_2:

$$|B_1 \cup B_2| = |B_1| + |B_2| = (n_1 + \cdots + n_k) + n_{k+1}.$$

Per a determinar el cardinal $|B_1|$ hem aplicat la *hipòtesi d'inducció.*

4. Quantes parelles ordenades (x, y) de nombres enters hi ha que compleixin la propietat $x^2 + y^2 \leq 5$?

Sigui $A = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x^2 + y^2 \leq 5\}$. Fem $A_i = \{(x, y) : x^2 + y^2 = i\}, i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Aleshores $A_0 = \{(0, 0)\}, A_1 = \{(-1, 0), (1, 0), (0, 1).(0, -1)\}$, etc. Un cop ben caracteritzats els conjunts $A_i, i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, calculem $|A_i|$. Llavors podem aplicar el PA, atès que $A = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$, i que els conjunts $A_i, i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, són disjunts dos a dos. Per tant,

$$|A| = |A_0| + |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| = 1 + 4 + 4 + 0 + 4 + 8 = 21.$$

5. Trobeu tots els divisors positius possibles de 600, incloent-hi l'1 i el 600.

Sabem que $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$. Els seus divisors són de la forma

$$d = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^k, \text{ on } 0 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq 1, 0 \leq k \leq 2.$$

Per tant hem de calcular $|D|$, on $D = \{d \in \mathbb{N} : d \,|\, 600\}$. Cal, doncs, trobar el nombre de ternes ordenades (i, j, k) que podem fer amb $i \in \{0,1,2,3\}$, $j \in \{0,1\}$, $k \in \{0,1,2,\}$. Pel PM resulta que $|D| = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$.

6. Sabem que el valor Q_n de la suma $1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2$ dels quadrats dels n primers nombres naturals val $\dfrac{(2n+1)\,n\,(n+1)}{6}$.

Una manera de provar-ho és aplicant el principi d'inducció. D'entrada hem de calcular

$$Q_1 = 1^2 = 1 \text{ i } \frac{(2 \cdot 1 + 1) \cdot 1 \cdot (1+1)}{6} = 1.$$

Coincideixen.

Seguidament, suposem que $Q_n = 1^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{(2n+1)\,n\,(n+1)}{6}$. És la hipòtesi d'inducció.

Ara hem de demostrar, basant-nos en la hipòtesi d'inducció, que

$$Q_{n+1} = \frac{(2\,(n+1)+1)\,(n+1)\,((n+1)+1)}{6}.$$

Però,

$$Q_{n+1} = Q_n + (n+1)^2 = \frac{(2n+1)\,n\,(n+1)}{6} + (n+1)^2.$$

Només cal fer els càlculs pertinents.

7. Sigui $N = p_1^{k_1}\, p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$, on $p_1, p_2, \ldots, p_r$ són nombres primers, i D el conjunt dels divisors positius de N. Llavors $|D| = (k_1+1)\,(k_2+1) \cdots (k_r+1)$. És un simple exercici d'aplicació del principi multiplicatiu. Feu-lo!

Figures combinatòries

Nombre de parts d'un conjunt A

Sigui A un conjunt amb m elements. El *nombre de parts* o de *subconjunts* de A, és a dir, el nombre d'elements del conjunt $\mathcal{P}(A)$, és 2^m. (*Indicació*: Recordem que $\emptyset$ i A són subconjunts del conjunt A.)

Permutacions de m elements

Una *permutació* de m objectes és el resultat de col·locar els m objectes en m llocs (o cel·les o també caselles) de manera que cada lloc contingui solament un objecte.

Tenim, doncs, m objectes $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ en m cel·les. A la primera cel·la n'hi podem col·locar m, a la segona, només $m-1$, atès que ja n'hi ha un a la primera cel·la i no el podem repetir, etc. Pel PM, resulta que el *nombre* $\mathbf{P}_m$ de permutacions de m objectes és

$$\mathbf{P}_m = m\,(m-1)\cdots 2\cdot 1 = m!$$

Nota. $m!$ es llegeix *factorial* de m, o bé m *factorial*. Per conveni, $0! = 1$.

Fixem-nos que una *permutació* de m elements és una *filera* o *paraula* feta amb els m objectes sense repetir-ne cap.

Variacions de m elements presos de k en k

Suposem ara que tenim m objectes, però solament disposem de k cel·les, amb $k \leq m$. Cada una de les diferents maneres de col·locar k dels m objectes, sense repetir-ne cap, en les k cel·les és una *variació de m elements presos de k en k*. Dues variacions amb els mateixos objectes però col·locats de maneres diferents, són diferents.

Com abans, és clar que el *nombre* $\mathbf{V}_m^k$ de variacions de m elements presos de k en k és

$$\mathbf{V}_m^k = m\,(m-1)\cdots(m-k+1) = \frac{m!}{(m-k)!}.$$

És clar que $\mathbf{V}_m^m = \mathbf{P}_m$ i $\mathbf{V}_m^0 = 1$, atès que $0! = 1$.

Una *variació de m elements presos de k en k* és una *filera* o *paraula* feta amb k objectes diferents dels m de què disposem.

Combinacions de m elements presos de k en k

Una *combinació de m elements presos de k en k* és una tria de k elements dels m donats. És evident que ha de ser $k \leq m$.

Això fa que dues variacions de m objectes presos de k en k, amb els mateixos k elements, però col·locats de manera diferent, donin la mateixa combinació. I de variacions diferents que donen una mateixa combinació n'hi ha exactament $k!$. Per tant,

$$\mathbf{C}_m^k = \binom{m}{k} = \frac{1}{m!}\,\mathbf{V}_m^k = \frac{m!}{k!\,(m-k)!}.$$

Els nombres $\binom{m}{k}$ s'anomenen *nombres combinatoris* i tenen propietats molt notables. A tall d'exemple en posem algunes.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$
$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n.$$

El desenvolupament del *binomi de Newton* conté nombres combinatoris.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Podem escriure aquesta fórmula en forma abreujada

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i.$$

Variacions circulars relatives

Una *variació circular relativa de m objectes presos de k en k* és una col·locació arbitrària al voltant d'una taula rodona de k objectes triats d'entre m, tenint en compte que només cal fixar-se en la posició relativa del objectes entre ells, però no en relació a la taula.

Per veure-ho, suposem que $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ ésun conjunt de $m = 4$ elements i que $k = 3$. Aleshores $\mathbf{V}_4^3 = 24$. Ara bé, aquestes vint-i-quatre variacions les podem dividir en 8 grups que són indistingibles per *rotació circular*.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
$\alpha\beta\gamma$	$\alpha\beta\delta$	$\alpha\gamma\delta$	$\beta\gamma\delta$	$\alpha\gamma\beta$	$\alpha\delta\beta$	$\alpha\delta\gamma$	$\beta\delta\gamma$
$\gamma\alpha\beta$	$\delta\alpha\beta$	$\delta\alpha\gamma$	$\delta\beta\gamma$	$\beta\alpha\gamma$	$\beta\alpha\delta$	$\gamma\alpha\delta$	$\gamma\beta\delta$
$\beta\gamma\alpha$	$\beta\delta\alpha$	$\gamma\delta\alpha$	$\gamma\delta\beta$	$\gamma\beta\alpha$	$\delta\beta\alpha$	$\delta\gamma\alpha$	$\delta\gamma\beta$

És a dir, cada tres variacions dels elements de A presos de tres en tres donen una mateixa variació circular. Per tant, $\mathbf{Q}_4^3 = \dfrac{1}{3}\mathbf{V}_4^3 = 8$.

En general, doncs: $\mathbf{Q}_m^k = \dfrac{1}{k}\,\mathbf{V}_m^k$.

Variacions amb repetició de m objectes presos de k en k

Ara, a diferència de les variacions introduïdes abans en les quals un cop col·locat un objecte en un lloc no era possible col·locar-lo en cap altre lloc, això ho podem fer. Cal, és clar, que disposem de prou còpies de cada objecte. Això fa que, a l'hora de col·locar l'objecte següent, estiguem en les *mateixes condicions* que abans de col·locar-lo. Hi ha independència de les accions efectuades.

Una *variació amb repetició de m objectes presos de k en k* s'obté quan es col·loquen k còpies d'alguns dels objectes d'un conjunt de m objectes diferents, en k cel·les de manera que cada cel·la només contingui un objecte.

És clar que el nombre $\mathbf{VR}_m^k$ de variacions amb repetició de m objectes presos de k en k és $\mathbf{VR}_m^k = m^k$.

Permutacions amb repetició de m objectes

Disposem de m objectes dels quals k són iguals entre si i $(m-k)$ també són iguals entre si. Si els permutem de totes les maneres possibles, tindrem $m!$ casos, però no pas *tots seran diferents*, atès que les permutacions entre si dels k objectes que són indistingibles dóna una mateixa permutació. Això fa que, de fet, només en puguem distingir, com a màxim, $\frac{m!}{k!}$. Ara bé, el mateix passa amb les permutacions dels $(m-k)$ objectes indistingibles. Per tant, en total

$$\mathbf{PR}_m^k = \frac{m!}{k!\,(m-k)!} = \binom{m}{k} = \mathbf{C}_m^k.$$

En general, si tenim m objectes, però n'hi ha k_1 d'indistingibles, k_2 d'indistingibles, ..., k_r d'indistingibles, amb $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = m$, aleshores, quan els permutem, tenim les *permutacions amb repetició de m objectes amb $k_1, k_2, \ldots, k_r$ de repetits*. El nombre $\mathbf{PR}_m^{k_1,\ldots,k_r}$ de *permutacions amb repetició de m objectes amb $k_1, k_2, \ldots, k_r$ de repetits* és:

$$\mathbf{PR}_m^{k_1,\ldots,k_r} = \frac{m!}{k_1! \cdots k_r!}.$$

Combinacions amb repetició de m objectes

Donats m objectes dels quals en tenim tantes còpies com faci falta, una *combinació amb repetició de m objectes presos de k en k* és qualsevol tria de k còpies d'entre els m tipus d'objectes diferents.

Per tal de calcular el nombre $\mathbf{CR}_m^k$ analitzarem un cas particular. Tenim una pila d'objectes de 4 tipus. Cada objecte pot ser de tipus $1, 2, 3, 4$ i en volem triar 3. En aquest cas, $m = 4, k = 3$. Per representar cada tria disposem de *quatre cel·les* o *caselles* separades entre elles per una paret i numerades de 1 a 4, i 3 boles iguals. Col·loquem a cada cel·la tantes boles com objectes d'aquell tipus hi hagi a la tria feta. És a dir,

tries		cel·les 1	2	3	4		representació
111	→	•••				→	• • • ∣ ∣ ∣
112	→	••	•			→	• • ∣ • ∣ ∣
113	→	••		•		→	• • ∣ ∣ • ∣
114	→	••			•	→	• • ∣ ∣ ∣ •
122	→	•	••			→	• ∣ • • ∣ ∣
123	→	•	•	•		→	• ∣ • ∣ • ∣
124	→	•	•		•	→	• ∣ • ∣ ∣ •
133	→	•		••		→	• ∣ ∣ • • ∣
134	→	•		•	•	→	• ∣ ∣ • ∣ •
144	→	•			••	→	• ∣ ∣ ∣ • •
222	→		•••			→	∣ • • • ∣ ∣
223	→		••	•		→	∣ • • ∣ • ∣
224	→		••		•	→	∣ • • ∣ ∣ •
233	→		•	••		→	∣ • ∣ • • ∣
234	→		•	•	•	→	∣ • ∣ • ∣ •
244	→		•		••	→	∣ • ∣ ∣ • •
333	→			•••		→	∣ ∣ • • • ∣
334	→			••	•	→	∣ ∣ • • ∣ •
344	→			•	••	→	∣ ∣ • ∣ • •
444	→				•••	→	∣ ∣ ∣ • • •

Tal com indica la darrera columna de la taula, podem identificar cada tria amb una seqüència de tres boles i tres barres, corresponents a les boles i als separadors, i fet de totes les maneres possibles; i d'aquestes n'hi ha tantes com les permutacions amb repetició de 6 elements amb 3 i 3 repetits. És a dir,

$$\mathbf{CR}_4^3 = \mathbf{PR}_{(4-1)+3}^3 = \mathbf{C}_6^3 = \binom{6}{3}.$$

En general, tindrem un conjunt prou gran d'objectes, cada un de tipus de 1 a m i n'haurem de triar k; seguint amb l'exemple anterior, necessitaríem m cel·les (per tant, amb $m-1$ separadors) per a col·locar-hi k boles, posant a cada cel·la tantes boles com objectes d'aquell tipus hi hagi a la tria. D'aquesta manera podem identificar cada tria amb una successió de k boles i $m-1$ separadors. Per tant,

$$\mathbf{CR}_m^k = \mathbf{PR}_{m+k-1}^k = \mathbf{C}_{m-1+k}^k = \binom{m+k-1}{k}.$$

Distribucions de k objectes diferents *en n capses* diferents

(1) Cada capsa pot contenir, *com a màxim, un* objecte. Aleshores ha de ser $k \leq n$. Com que tots els objectes s'han de col·locar, el nombre de maneres de distribuir-los és el de variacions de n caixes preses de k en k, és a dir, $\mathbf{V}_n^k$.

(2) Cada capsa pot contenir *qualsevol nombre* d'objectes. Aleshores el nombre de maneres de distribuir-los és el de variacions amb repetició de n capses preses de k en k, és a dir, $\mathbf{VR}_n^k$.

(3) Cada capsa pot contenir qualsevol nombre d'objectes, però l'ordre dins de cada capsa és rellevant. Aleshores el nombre de casos és $\dfrac{(n-1+k)!}{(n-1)!}$.

Distribucions de k objectes idèntics *en n capses* diferents

(1) Si cada capsa pot contenir, *com a màxim, un* objecte, aleshores ha de ser $k \leq n$ i el nombre de maneres de distribuir-los és el de combinacions de n capses preses de k en k, és a dir, $\dbinom{n}{k}$.

(2) Si cada capsa pot contenir qualsevol nombre d'objectes, aleshores el nombre de maneres de distribuir-los és el de combinacions amb repetició de n capses preses de k en k, és a dir $\mathbf{CR}_n^k$.

Problemes

AC1.–Proveu l'afirmació de l'exemple 7.

AC2.–Proveu, per inducció, que el nombre de subconjunts d'un conjunt A, de cardinal m, inclosos el conjunt buit i A, té cardinal 2^m.

AC3.–Proveu, per inducció, que si un conjunt A té m elements, el conjunt d'aplicacions de A en el conjunt $\mathbf{2} = \{0, 1\}$, en té 2^m.
Sabrieu provar-ho d'una altra manera?

AC4.–Useu el PM per provar que el nombre de tirallongues de n nombres naturals agafats del conjunt $A = \{1, 2, \ldots, k\}$ és igual a k^n.

AC5.–El menú turístic d'un restaurant és:

Elegiu un dels entrants:

Sopa, Suc de fruita, Cocktail de marisc.

Elegiu un dels següents plats de vianda:

Bistec

Roast Beaf

Pollastre rostit

Mandonguilles amb espaguetti

Elegiu un dels següents acompanyaments:

Patates fregides

Tomàquet a la grega

Pèsols saltejats

Elegiu una d'aquestes postres:

Fruita, Gelat, Formatge.

Elegiu:

Café o Té.

Quants menjars diferents hi pot fer un turista? Quin dia podrà tornar a casa seva si el primer dinar el fa el 28 de febrer de 1993, suposant que els vol tastar tots i només hi dina?

AC6.–Llancem 6 daus indistingibles. Quants resultats diferents podem observar? I si els daus són distingibles?

AC7.–Considerm totes les $\mathbf{VR}_4^2$ del conjunt $\{1,2,3,4\}$ i totes les $\mathbf{V}_4^2$. Quants elements cal eliminar de les primeres per tal d'aconseguir $\mathbf{CR}_2^4$? I quines hem d'eliminar de les segones per obtenir $\mathbf{C}_2^4$?

AC8.–(i)Quatre persones volen jugar simultàniament partits individuals de tennis i disposen de dues pistes. De quantes maneres podem distribuir-los, si no tenim en compte l'elecció de pista? De quantes maneres, si es té en compte la pista on juga cada parella?

(ii) De quantes maneres podem situar m persones en r llocs diferents si volem que $m_1, m_2, \ldots, m_r$ es col·loquin respectivament al lloc $1, 2, \ldots, r$? $(m_1 + m_2 + \cdots + m_r = m)$.

AC9.–Sis muntanyencs s'han de dividir en 3 grups de dos cada un per tal de fer l'assalt final. De quantes maneres poden fer-ho? I si els grups consten d'1, 2 i 3 persones?
Si ara cal ordenar-los en primer, segon i tercer grup d'assalt, de quantes maneres ho podrem fer?

AC10.–Proveu que

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n};$$

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-2}{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n-1}{n-1}.$$

AC11.–Proveu que

$$\binom{m}{n} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cdot \binom{m-k}{n-j}$$

i calculeu $\binom{7}{3}$ i $\binom{7}{5}$ fent servir el triangle aritmètic fins a la fila 5.

AC12.–De quantes maneres podem posar n boles en n capses numerades de forma que quedi buida exactement una capsa? (*Indicació*: Separeu el cas distingible del cas indistingiuble.)

AC13.–Una noia vol regalar al seu xicot una camisa o una corbata pel seu aniversari. Però solament pot triar entre 3 camises i 2 corbates. Quantes tries diferents pot fer? I si vol comprar alhora una camisa i una corbata?

AC14.–En una botiga hi ha tres menes de camises per vendre
(a) Si dos homes compren una camisa cada un, de quantes maneres diferents poden fer-ho?
(b) Si un home compra dues camises, de quantes maneres pot triar-les?

AC15.–Quantes inicials diferents podem fer amb dues o tres lletres de l'alfabet?
Quantes lletres hauria de tenir un alfabet per tal que un milió de persones diferents es pogués identificar amb inicials de dues o tres lletres?

AC16.–De quantes maneres es poden aparellar 4 nois i 4 noies? De quantes maneres es poden col·locar en una fila de manera que s'alternin persones de sexe diferent?

AC17.–De quantes maneres podem triar un comitè de tres persones d'un grup de 20? I de quantes si cal que una sigui el president, l'altre el vice-president i la tercera secretari?

AC18.–Si tenim dues monedes de 50 pta, dues de 25 pta i tres duros, quantes sumes diferents podem aconseguir? Si canviem una de les monedes de 25 pta en duros, quantes sumes diferents podrem aconseguir?

AC19.–Deu llibres es col·loquen en dues piles. De quantes maneres podem fer-ho si els llibres són indistingibles? I si són distingibles? I si les piles són distingibles o indistingibles? Analitzeu els 4 casos.

AC20.–Repartim deu llibres diferents entre en Daniel, en Felip, en Pau i en Joan de manera que s'enduen respectivament lots de 3, 3, 2 i 2 llibres. De quantes maneres podem fer-ho?
En Pau i en Joan no estan d'acord amb aquest repartiment i es decideix repartir els lots entre ells de manera que cada un tingui un lot. De quantes maneres podem fer ara el repartiment? Ara la Maria i la Cori volen també tenir dret a aconseguir llibres. Es decideix repartir els lots entre tots sis de forma que hi haurà dues persones que no obtindran cap lot. De quantes maneres podem fer això?

AC21.–Considereu el conjunt $A = \{1, 2, \dots, 100\}$ i sigui

$$S = \{(a, b, c) : a, b, c \in A, a < b \text{ i } a < c\}.$$

Trobeu $|S|$.

AC22.–Proveu, per inducció, que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2\,(n+1)^2}{4}$. Sabrieu demostrar-ho d'alguna altra manera?

AC23.–Trobeu les identitats que expressen, en funció de n, els valors de
(a) $1 + 2 + \cdots + n$, (b) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$, i (c) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.
Fixeu-vos en la diferència que hi ha entre trobar una expressió i provar-ne la validesa, un cop trobada.

AC24.–De quantes maneres podem fer la tria d'una parella $\{a,b\}$ de nombres diferents del conjunt $A = \{1, 2, \ldots, 50\}$, si volem que
(a) $|a-b| = 5$,
(b) $|a-b| \leq 5$.

AC25.–*Principi additiu general* [PAG]: Si A, B són dos conjunts finits, aleshores $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Proveu-ho.

AC26.–Proveu que el nombre de *bijeccions* que podem fer entre el conjunt $\mathbf{m} = \{1, 2, \ldots, m\}$ i un conjunt A amb m elements coincideix amb el nombre de permutacions de m elements.

AC27.–Suposem que volem col·locar m objectes en m cadires que es troben al voltant d'una taula rodona i que les cadires estan numerades amb els números $1, 2, \ldots, m-1, m$. Proveu que les maneres de fer-ho és $m!$.*Nota:* Les cadires són distingibles.
Qu passaria, si les cadires no fossin distingibles?

AC28.–Siguin A, B dos conjunts i suposem que $|A| = k, |B| = m, k \leq m$. Quantes *injeccions* podem fer de A en B?

AC29.–(a) Tenim 4 fitxes marcades amb les lletres a, b, c, d. Quantes paraules de tres lletres podem fer?
(b) Quantes paraules de tres lletres podem fer amb les lletres a, b, c, d?
(c) Tenim 9 fitxes numerades de l'1 al 9. Quants nombres de 4 xifres podem fer?
(d) Quants nombres de 4 xifres podem fer usant només els nombres $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$?

AC30.–Sigui $A = \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$ el conjunt de les 26 lletres de l'alfabet català. Quin és el nombre de paraules de 5 lletres que podem fer amb les lletres de A, si volem que la primera i la darrera siguin vocals i les altres tres consonants?

AC31.–En una festa hi ha 7 nois i 3 noies. De quantes maneres podem posar-los en fila, si volem que
(a) les noies formin un bloc, (b) les dues posicions finals estiguin ocupades per nois i que cap noia no estigui al costat d'una altra noia?

AC32.–Entre 20.000 i 70.000, quants nombres parells hi ha que no tinguin cap dígit repetit?

AC33.–Sigui A el conjunt dels nombres naturals els dígits dels quals són $\{1,3,5,7\}$ sense que n'hi hagi cap de repetit. Calculeu:
(a) el cardinal del conjunt A;
(b) el nombre $S = \sum_{m\in A} m$.

AC34.–(a) Proveu que tot nombre combinatori és un nombre natural. Sabrieu demostrar-ho per inducció?
(b) Proveu que, si p és un nombre primer i $1 \leq k < p$, aleshores $\binom{p}{k}$ és un múltiple de p.
(c) Què passa quan p no és un nombre primer? [*Indicació*: Feu unes quantes fileres del *triangle aritmètic*.]

AC35.–Proveu que $\binom{m}{k}$ és el nombre de subconjunts de k elements d'un conjunt A de m elements. Deduïu-ne que

$$\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \cdots + \binom{m}{m-1} + \binom{m}{m} = 2^m.$$

AC36.–Fem tirallongues de 0 i 1 de llargada 7. Quantes n'hi ha que tinguin 3 zeros i 4 uns? Deduïu-ne que $\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$.

AC37.–De quantes maneres podem fer un comitè de 5 persones d'un col·lectiu de 11 de les quals 4 són noies i 7 són nois, si volem que
(a) el comitè tingui exactament dues noies?
(b) el comitè tingui almenys 3 noies?
(c) el comitè contingui una noia i un noi concrets?

AC38.–(a) De quantes maneres diferents podem formar tres equips de futbol amb 33 nois?
(b) Si $|A| = 2n, n \geq 1$, quantes parelles d'elements de A podem fer?
(c) Generalitzeu aquest problema. Proveu que el nombre de k-agrupacions diferents d'elements de A, amb $|A| = n\,k$ és precisament $\dfrac{(n\,k)!}{n!\,(k!)^n}$.

Mostra de solucions

Solució del problema AC14

Suposem que dos homes compren una camisa cada un. El primer home pot comprar una camisa d'un dels tres tipus que hi ha. El segon home també. Per tant hi ha $3 \times 3 = 9$ maneres de fer-ho. També es pot interpretar que es tracta de $\mathbf{VR}_3^2$.
Si un home compra dues camises, l'ordre com les tria no és rellevant per al resultat final de la compra. Com que els tipus de camises es poden repetir, tindrem $\mathbf{CR}_3^2 = \binom{3+2-1}{2} = 6$ maneres de fer-ho.

Solució del problema AC18

És un problema de comptes de la vella, és a dir, cal comptar sense equivocar-se ni deixar-se cap cas, ni repetir-ne cap.

D (duros)	$D+25$	$D+2\cdot 25$ $(D+50)$	$D+25+50$	$D+2\cdot 25+50$ $(D+2\cdot 50)$	$D+2\cdot 50$ $+25$	$D+2\cdot 50$ $+2\cdot 25$
	25	50	75	100	125	150
5	30	55	80	105	130	155
10	35	60	85	110	135	160
15	40	65	90	115	140	165.

L'altre cas es deixa per al lector.

Solució del problema AC19

a) Llibres indistingibles i piles distingibles. Els deu llibres es poden col·locar a les piles en les formes $(0,10)$, $(1,9)$, $\ldots$ $(9,1)$ i $(10,0)$. En total hi ha 11 maneres de fer-ho.
b) Llibres indistingibles i piles indistingibles. Les piles dels cas anterior $(0,10)$ i $(10,0)$ són indistingibles. També ho són les $(1,9)$ i $(9,1)$, etc. fins a les $(4,6)$ i $(6,4)$. L'apilament $(5,5)$ no té parella. En total els apilaments es poden fer de 6 maneres.
c) Llibres distingibles i piles distingibles. Primer permutem els llibres de totes les maneres possibles, que seran $10!$. Fixada una permutació concreta dels llibres, apilem-los tal com hem fet al cas a). Tindrem en total $11 \times 10!$ maneres en total.
d) Llibres distingibles i piles indistingibles. Es raona com al cas anterior formant les $10!$ permutacions de llibres, i apilant-los després segons b). En total hi haurà $6 \times 10!$ casos.

Solució del problema AC30

A l'alfabet de 26 lletres hi ha 5 vocals i 21 consonants. Podem fixar les vocals de $\mathbf{VR}_5^2 = 5^2$ maneres diferents, i les consonants de $\mathbf{VR}_{21}^3 = 21^3$ maneres diferents. En total tindrem $5^2\,21^3$ paraules.

Solució del problema AC31

a) Considerem les tres noies com un bloc. Les noies, en aquest bloc, poden col·locar-se de 3! maneres diferents. Si marquem amb números les posicions dels nois, i amb $\bullet$ els llocs inicial, final i intermedis, tindrem

$$\bullet 1 \bullet 2 \bullet 3 \bullet 4 \bullet 5 \bullet 6 \bullet 7 \bullet$$

i el bloc de noies ha d'ocupar una de les posicions marcades per $\bullet$. En total tindrem, doncs, $8 \times 3!\,7!$ col·locacions possibles.

b) Si marquem, com abans, les posicions dels nois amb números, *cada una* de les noies pot ocupar una posició $\bullet$ a

$$1 \bullet 2 \bullet 3 \bullet 4 \bullet 5 \bullet 6 \bullet 7$$

i haurem de triar 3 $\bullet$ d'entres els 6 que hi ha. Com que les noies es poden permutar i els nois també, tindrem $\mathbf{C}_6^3\mathbf{P}_3\mathbf{P}_7 = \mathbf{V}_6^3\mathbf{P}_7$ possibilitats